SUR L'HYDRAULIQUE DES PUITS

par

G. SCHNEEBELI

Résumé

Ce mémoire traite de la théorie des puits traversant entièrement une nappe phréatique à fond horizontal.

Après un bref rappel des théories de DUPUIT-FORCHEIMER les résultats d'une théorie rigoureuse sont exposés : Justification de la formule de DUPUIT pour le débit, démonstration de l'existence d'une surface de suintements.

L'analyse de solutions exactes obtenues pour des cas particuliers permet d'établir une loi générale donnant la cote de l'intersection de la surface libre et de la paroi du puits en fonction de la cote du plan d'eau dans le puits, de son rayon et de son débit.

Une place importante est faite à la discussion de la notion de rayon d'action. Dans le cas d'une alimentation lointaine de la nappe, il faut considérer un écoulement non-permanent. L'étude de cet écoulement permet d'obtenir des résultats intéressants concernant le rayon d'action. Il est montré notamment que celui-ci varie comme la racine carrée du débit du puits.

Le mémoire se termine par l'examen de l'incidence d'une anisotropie éventuelle du terrain tant sur le débit que sur la position de la surface libre.

Notations

e — (sans dimensions)	Porosité effective du sol.
H — (L)	épaisseur moyenne de la nappe.
h — (L)	cote de la surface libre mesurée à partir du fond imperméable horizontal.
$h' = h_D$ — (L)	cote de la ligne de DUPUIT.
h'_a — (L)	épaisseur de la nappe.
h'_p — (L)	cote du plan d'eau dans le puits.
K — ($L\,T^{-1}$)	perméabilité relative ou coefficient de DARCY.
Q — ($L^3\,T^{-1}$)	débit du puits.
r — (L)	distance à l'axe du puits.
r_a — (L)	rayon d'action.
r_p — (L)	rayon du puits.
T — (T)	temps d'établissement du régime quasi-permanent.
u — ($L\,T^{-1}$)	vitesse de filtration radiale.
$V = \partial\zeta/\partial t$ ($L\,T^{-1}$)	vitesse de rabattement.
$\alpha = KH/e$ ($L^2\,T^{-1}$)	
$\gamma = 1{,}781$	(sans dimensions).
ε_ζ = (L)	variation du niveau d'eau dans le puits.
$\zeta = h'_a - h$ (L)	rabattement.
$\lambda = \varepsilon\zeta/\tau$ ($L\,T^{-1}$)	indice de permanence.
τ — (T)	temps de pompage.
φ — (L)	charge hydraulique.

Introduction

La théorie de l'écoulement vers un puits d'une nappe d'eau souterraine constitue l'un des chapitres les plus importants de l'hydraulique souterraine. Il est également un des plus anciens puisque les travaux de J. DUPUIT ont été publiés en 1863, sept ans seulement après le fameux mémoire de DARCY.

A l'aide d'un raisonnement sommaire, DUPUIT a obtenu, pour le débit d'un puits traversant entièrement une nappe phréatique à fond horizontal, une formule identique à celle que donne la théorie « exacte » du potentiel. Il fut, par contre, moins heureux en ce qui concerne la forme de la surface libre de la nappe qui, telle qu'il la décrit, ne coincïde pas, au voisinage du puits, avec les observations qui ont été faites dans la nature.

C'est à cette insuffisance de la théorie de DUPUIT que l'on doit sans doute l'intérêt que les hydrauliciens ont continué à porter au problème du puits, intérêt qui a motivé de nombreux travaux, parmi lesquels nous citerons ceux de MM. VIBERT et JAEGER.

Récemment, des solutions numériques « exactes » basées sur la théorie du potentiel ont été élaborées à l'aide de la méthode de relaxation, notamment par BOULTON. Mais ces solutions ne s'appliquent qu'aux cas particuliers traités. Leur élaboration demande en outre un travail de calcul numérique trop ardu pour qu'on puisse envisager de généraliser l'emploi de cette méthode dans la pratique. Enfin, « last but not least », la théorie du potentiel ne résoud pas le « mystère » du rayon d'action, ainsi que l'a appelé M. CAMBEFORT. Sa détermination à priori reste un élément arbitraire, au mieux empirique, qui s'introduit dans les calculs les plus poussés.

Dans le cadre de la présente étude, nous avons tenté, en nous limitant au cas d'un puits traversant entièrement une nappe à fond imperméable horizontal, une synthèse théorique joignant aux éléments connus quelques éléments nouveaux, notamment en ce qui concerne la notion de rayon d'action. Notre but étant avant tout de donner des formules et méthodes utilisables dans la pratique, nous n'avons pas hésité à nous contenter parfois d'approximations assez grossières que nous avons d'ailleurs chaque fois explicitées.

Les formules de Dupuit

DUPUIT admet qu'à la distance r de l'axe du puits, la vitesse radiale de l'écoulement souterrain est donnée par la formule :

$$u = \mathrm{K}\, d\,h/d\,r$$

K étant le coefficient de DARCY et $d\,h/d\,r$ la pente de la surface libre de la nappe. (voir fig. 1).

Il écrit le débit traversant la surface cylindrique de rayon r et de hauteur h

$$\mathrm{Q}\,(r) = 2\pi\ \mathrm{K}\, r\, h\ \ d\,h/d\,r$$

La permanence de l'écoulement implique que $\mathrm{Q}\,(r) =$ Constante. On peut donc intégrer l'équation précédente qui s'écrit :

$$d\,(h^2)/dr = \mathrm{Q}/\pi\mathrm{K}\ r$$

en tenant compte de ce que pour $r = r_p$ (rayon du puits) $h = h_p$ (hauteur d'eau dans le puits). On obtient :

$$h^2 - h^2_{\,p} = \mathrm{Q}/\pi\mathrm{K}\,.\ ln\,(r/r_d)$$

On admet qu'au-delà du rayon r_a, appelé rayon d'action du puits, aucun rabattement sensible de la nappe ne se produit. En posant $r = r_a$ et $h = h_a$ (hauteur initiale de la nappe) on trouve immédiatement la formule de DUPUIT donnant le débit du puits :

$$\mathrm{Q} = \pi\mathrm{K}\,\frac{h_a{}^2 - h_p{}^2}{ln\,(r_a/r_p)} \tag{1}$$

En introduisant cette valeur dans l'équation précédente on obtient l'équation de la surface libre de la nappe en écoulement ou « cône de rabattement »

$$h^2 = h_p{}^2 + \frac{h_a{}^2 - h_p{}^2}{ln\,(r_a/r_p)}\ ln\,(r/r_p) \tag{2}$$

La critique de la théorie de DUPUIT a été faite par VIBERT et JAEGER, nous n'insisterons donc pas spécialement. Notons simplement que, dans sa mise en équations, DUPUIT a négligé la composante verticale de la vitesse de filtration. Ceci n'est admissible que si la surface libre rabattue ne présente que de faibles pentes. Un fait plus gênant est que le cône de rabattement se raccorde au plan d'eau dans le puits, ce qui est nettement démenti par l'expérience.

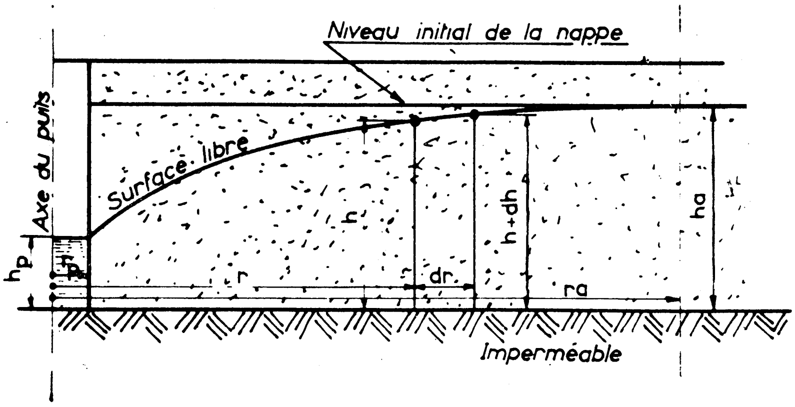
Niveau initial de la nappe
Axe du puits
Surface libre
h
h+dh
ha
hp
r
dr
ra
Impermeable

Fig. 1

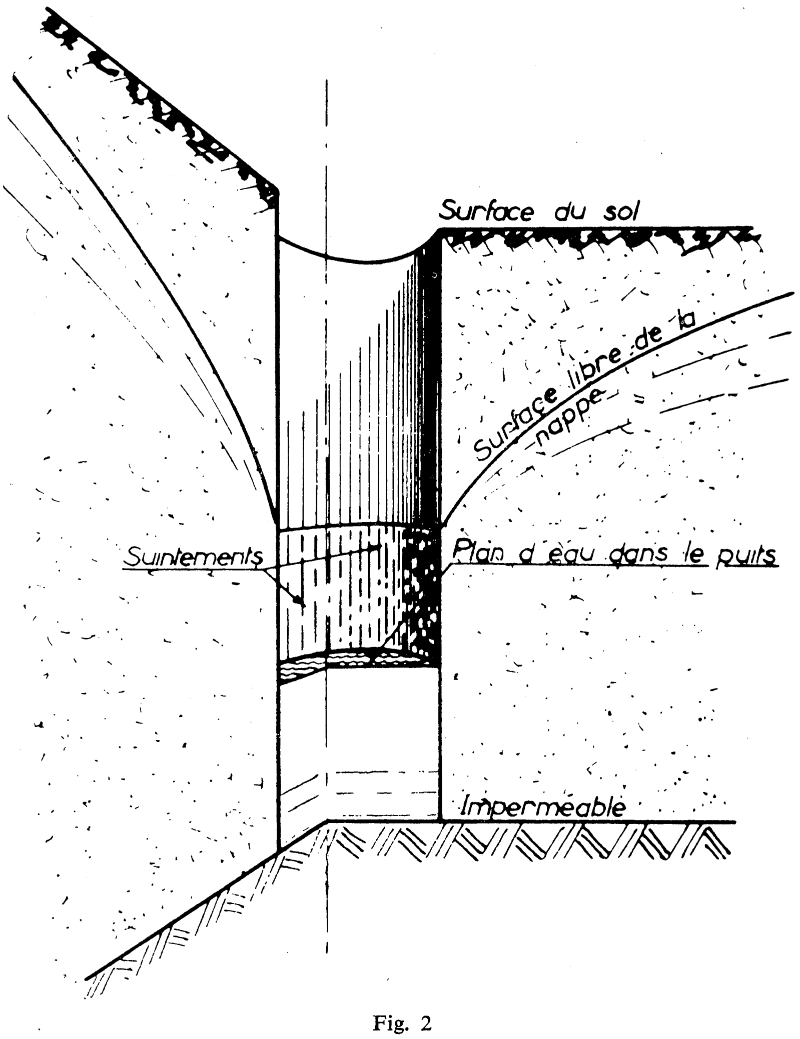
Surface du sol
Surface libre de la nappe
Suintements
Plan d'eau dans le puits
Impermeable

Fig. 2

On observe en effet que, pour des rabattements un peu importants, il se produit un décrochement entre la surface libre et le plan d'eau dans le puits. On constate alors l'existence d'une surface à travers laquelle l'eau pénètre dans le puits en suintant sur la paroi de celui-ci (fig. 2). Il suffit d'ailleurs de remarquer que, dans l'hypothèse de DUPUIT, la section d'écoulement serait nulle lorsque le niveau d'eau dans le puits est maintenu à zéro au moyen d'un puisard, pour mettre aussitôt en évidence l'inconsistance de cette hypothèse.

Dans la pratique, on adopte généralement la formule de DUPUIT donnant le débit, mais on considère que — sauf pour les très faibles rabattements — la surface libre se trouve au-dessus de la ligne de DUPUIT.

Nous allons voir que ces positions sont tout à fait justifiées.

Théorie plus exacte des puits pénétrant entièrement une nappe phréatique à fond horizontal

Formule du débit

Nous admettons que l'écoulement suit la loi de DARCY généralisée que l'on peut écrire :

$$\overline{V} = -K\,\overline{\text{grad}\,\varphi}$$

$\overline{V}$ étant le vecteur « vitesse de filtration ».

K le coefficient de DARCY.

$\varphi = p/\omega + z$ la charge hydraulique.

Nous noterons en outre $h\,(r)$ la cote de la surface libre.

Le débit du puits est égal au débit traversant un cylindre d'axe vertical de rayon r et de hauteur h.

$$Q = -2\pi \int_o^h u\,dz\,.\ \text{où } u \text{ est la composante radiale de } \overline{V}$$

$$Q = +2\pi \int_o^h K \frac{\partial\varphi}{\partial r}\, r\,dz\,. = 2\pi K \int_o^h \frac{\partial\varphi}{\partial(ln\,r)}\,dz\,.$$

En appliquant la règle de dérivation sous le signe $\int$, nous obtenons :

$$Q = 2\pi K \left\{ \frac{\partial}{\partial\,(ln\,r)} \int_o^h \varphi\,dz - \varphi\,(z = h)\,\frac{\partial\,h}{\partial\,(ln r)} \right\}$$

Etant donné qu'à la surface libre règne la pression atmosphérique (nous faisons abstraction de la capillarité) nous avons :

$$\varphi\,(z = h) = z = h$$

L'équation précédente peut se mettre sous la forme :

$$Q = 2\pi K \frac{\partial}{\partial\,(ln\,r)} \left\{ \int_o^h \varphi\,dz - \frac{h^2}{2} \right\} \tag{3}$$

La quantité entre parenthèses ne dépend pas de z mais uniquement de r. Posons donc

$$\left\{ \int_o^h \varphi\,dz - \frac{h^2}{2} \right\} = I\,(r)$$

Nous pouvons alors écrire l'équation (3) :

$$Q = 2\pi K \frac{d\,I}{d\,(ln\,r)}$$

équation qui s'intègre immédiatement entre $r = r_p$ et $r = r_a$:

$$Q\,ln\,(r_a/r_p) = 2\pi K\,[I\,(r_a) - I\,(r_p)] \tag{4}$$

La figure 3 donne le schéma pour la discussion des conditions aux limites de l'écoulement. La condition amont est matérialisée par une tranchée circulaire de rayon r_a (rayon d'action) dans laquelle le niveau de l'eau est maintenu à la cote h'_a et qui assure l'ailmentation de la nappe. Nous noterons h'_d le niveau de l'eau dans le puits. Les conditions imposées aux limites à la charge φ seront :

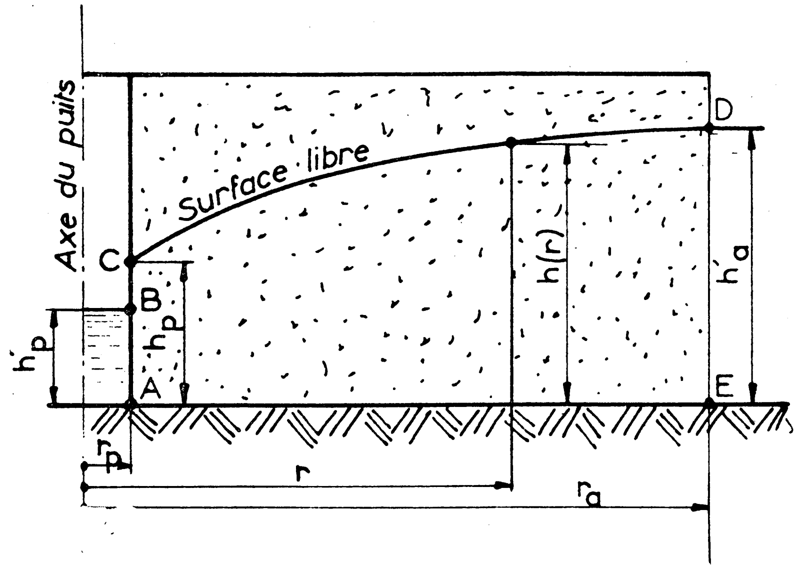

Fig. 3

— à l'aval. $\varphi = h'_p$ sur la hauteur $\overline{AB}$.

De B en C (surface de suintement) l'eau sort dans le puits à la pression atmosphérique de sorte que l'on a $\varphi = z$.

— à l'amont $\varphi = h'_a$ sur toute la hauteur $\overline{ED}$.

Bien que ces conditions n'interviennent pas directement dans le raisonnement qui va suivre *, nous indiquerons pour mémoire que sur la surface libre $\overset{\frown}{CD}$ on a

$$\varphi = z \text{ et } \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0,$$

a première de ces conditions indiquant que la pression est atmosphérique, la seconde que $\overset{\frown}{CD}$ est une ligne de courant. Enfin, sur le fond imperméable $\overline{AE}$ la condition est $\partial\varphi/\partial n = 0$.

Il ne nous reste plus maintenant qu'à déterminer, à partir des conditions aux limites, es valeurs $I(r_p)$ et $I(r_a)$

$$I(r_p) = \int_A^C \varphi \, dz - \frac{h^2_p}{2}$$

h_p est la cote de la surface libre sur la périphérie du puits

$$\int_A^C \varphi \, dz = \int_A^B h'_p \, dz + \int_B^C z \, dz = h'^2_p + \frac{h^2_p}{2} - \frac{h'^2_p}{2}$$

* Il a été tenu compte implicitement de ces conditions lorsqu'on a établi l'expression du débit du puits.

On a donc finalement :

$$I(r_p) = \frac{h'_p{}^2}{2}$$

$$I(r_a) = \int_E^D h'_a\, dz - \frac{h'_a{}^2}{2} = \frac{h'_a{}^2}{2}$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation (4), nous obtenons la formule du débit

$$\boxed{Q = K \frac{h'_a{}^2 - h'_p{}^2}{ln\left(\frac{r_a}{r_p}\right)}} \tag{5}$$

En comparant cette formule à celle de DUPUIT (1), nous voyons qu'elle s'identifie à cette dernière. En effet, DUPUIT a pris pour les hauteurs h_a et h_p de la surface libre les cotes des plans d'eau que nous avons noté h'_a et h'_p. La théorie « exacte » basée sur la loi de filtration

$$\overrightarrow{V} = - K\, \overrightarrow{\text{grad}\, \varphi}$$

d'où il résulte d'ailleurs que

$$\Delta \varphi = 0 \quad (\varphi \text{ est un potentiel harmonique})$$

conduit donc au même résultat que le raisonnement sommaire de DUPUIT.

La démonstration très élégante que nous venons d'en donner ci-dessus est due au Russe TCHARNYI, qui l'a présentée à l'Académie des Sciences de MOSCOU en 1951. M. VIBERT est le premier en France à avoir attiré l'attention sur le travail du savant soviétique.

Signalons qu'il existe une autre méthode pour démontrer l'exactitude de la formule de DUPUIT. Cette méthode est due, croyons-nous, à M. PERES. Elle consiste à appliquer à l'écoulement la formule de GREEN pour les fonctions harmoniques :

$$\iint_S \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n}\right) dS = 0$$

Φ et Ψ sont harmoniques, l'intégrale est prise sur toute la surface limitant le domaine de l'écoulement et n est la normale intérieure à cette surface. En posant $\Phi = \varphi$ et $\Psi = ln\, r$, et en tenant compte des conditions aux limites indiquées ci-dessus, on retrouve le résultat cherché.

Existence d'une surface de suintements.

Les démonstrations précédentes, si elles établissent sans contestation possible l'exactitude de la formule de DUPUIT, ne démontrent cependant pas pour autant l'existence, sur la paroi du puits, d'une zône de suintements. Ceci a d'ailleurs incité M. VIBERT à formuler certaines réticences vis-à-vis du raisonnement de TCHARNYI.

Il est cependant aisé d'apporter cette démonstration en reprenant le raisonnement à l'équation (3). Dans cette équation, nous effectuerons par parties l'intégrale figurant au second membre :

$$\int_o^h \varphi\, dz = \varphi z \Big/_o^h - \int_o^h \frac{\partial \varphi}{\partial z} z\, dz.$$

$$= h^2 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{\text{moy}} \right]$$

$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{moy}$ est une valeur moyenne de la composante verticale du gradient définie par :

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{moy} = \frac{1}{h^2}\int_{o}^{z=h} \frac{\partial\varphi}{\partial z}\, d(z^2)$$

Nous pouvons donc poser :

$$\mathrm{I}(r) = \frac{h^2}{2}\left[1 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{moy}\right] = \frac{h'^2}{2}$$

et écrire l'équation (3)

$$\frac{Q}{\pi K} = \frac{d(h'^2)}{d(ln\, r)}$$

Or, DUPUIT avait trouvé une équation différentielle identique pour la surface libre

$$\frac{Q}{\pi K} = \frac{d(h_D{}^2)}{d(ln\, r)}$$

Les débits Q étant identiques dans les deux cas ainsi que cela résulte de la démonstration précédente, nous pouvons écrire :

$$h'^2 = h_D{}^2 + \mathrm{Cte.}$$

Nous avons vu par ailleurq qu'aux limites

$$h'^2 = 2\,\mathrm{I} = h_D{}^2$$

de sorte que finalement nous avons, quel que soit r,

$$h'(r) = h_D(r)$$

Entre la cote h de la surface libre réelle et la cote h' de la courbe de DUPUIT nous avons donc la relation

$$h' = h\sqrt{1 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{moy}}$$

On peut démontrer mathématiquement que, dans tout le domaine de l'écoulement considéré :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} \geqslant 0$$

Ceci revient à dire qu'en aucun point il ne saurait exister un écoulement ascendant. Cec est tellement intuitif que la démonstration nous paraît superflue dans le cadre de cet exposé

Le gradient moyen défini plus haut est donc nécessairement positif de sorte que nous pouvons écrire;

$$h = \frac{h'}{\sqrt{1 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{moy}}} > h' \qquad (6)$$

La surface libre se trouve donc *au-dessus* de la ligne de DUPUIT et cela d'autant plus que les gradients verticaux sont plus importants. Ceci est notamment le cas à la surface du puits. Elle ne pourra être confondue avec la courbe de DUPUIT que dans les zônes où $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{moy}$ est négligeable, c'est-à-dire à des distances du puits telles qu'elle ne présente plus que de faibles pentes.

L'existence d'une surface de suintements est ainsi démontrée. Nous avons vu qu'elle est liée aux composantes verticales de l'écoulement.

Détermination approximative de la surface libre au voisinage du puits

La surface libre d'un écoulement vers un puits traversant entièrement la nappe aquifère a été déterminée par différents auteurs pour un certain nombre de ces particuliers. Les méthodes utilisées étaient :

1°) La méthode de relaxation (BOULTON, HALL).

C'est une méthode numérique d'intégration de l'équation $\Delta\varphi = 0$ qui régit l'écoulement.

2°) Le modèle réduit (BOULTON, BABITT & CALDWELL, HALL et d'autres).

3°) L'analogie électrique (BABITT & CALDWELL, ZEE, PETERSON & BOCK).

Du point de vue théorique, la méthode de relaxation donne certainement les résultats les plus sûrs. Elle permet en effet de pousser aussi loin que l'on désire la précision des résultats obtenus, moyennant — naturellement — un travail d'autant plus important de calcul numérique.

Les modèles réduits donnent les résultats les moins précis : la capillarité y perturbe notablement la surface libre. Par ailleurs, il est extrêmement difficile de réaliser un remplissage du modèle présentant les qualités voulues d'homogénéité. Seuls les résultats d'essais très soigneux effectués avec des précautions spéciales peuvent être retenus.

Quant aux méthodes d'analogie électrique, elles comportent en général un ajustement par approximations successives de la surface libre et des conditions qui y sont imposées. La précision des résultats dépendra donc du soin apporté à cet ajustement ainsi que l'ailleurs de l'homogénéité du conducteur utilisé.

BOULTON a remarqué que, dans tous les cas, la ligne de DUPUIT coïncide d'une façon satisfaisante avec la surface libre à partir d'une distance au puits $r \geqslant 3/2\, h$. Lorsque le rabattement n'est qu'une fraction de la hauteur totale de la nappe, cette distance semble encore diminuée.

Nous avons vu de notre côté, sur le plan théorique, que la différence entre la surface libre et la ligne de DUPUIT provenait des gradients verticaux. Or, l'importance de ces gradients à une distance r du puits dépend de la pente de la surface libre ou, pour r assez grand, de la pente de la ligne de DUPUIT. Il nous paraît donc logique de remplacer le critère purement empirique de BOULTON ($r \geqslant 3/2\, h$) par un critère ayant une certaine base théorique, et nous définirons un rayon r_D, à partir duquel la ligne de DUPUIT représente bien la surface libre, comme la distance au puits à laquelle la pente $\partial h'/\partial r$ de la ligne de DUPUIT a une valeur suffisamment faible.

En prenant

$$r_D \text{ tel que } \frac{\partial h'}{\partial r}(r_D) = \frac{1}{10}$$

on obtient une bonne concordance avec tous les cas traités.

La distance r_D est facile à déterminer dans chaque cas particulier. Pour achever le tracé de la surface libre au voisinage du puits, il suffira pratiquement de connaître en outre la cote h_p de cette surface sur la paroi du puits.

Nous avons cherché une loi générale donnant cette cote en fonction des différents paramètres conditionnant l'écoulement au voisinage du puits. Certains résultats de Boulton nous ont permis d'arriver à la conclusion que h_p devait dépendre essentiellement du débit Q, du rayon du puits r_p et de la cote h'_p du plan d'eau dans le puits. En fait, on doit avoir la relation :

$$\frac{h_p{}^2 - h_p{}^2}{Q/\pi K} = F\left(\frac{r_p{}^2}{Q/\pi K}\right) \tag{7}$$

La place nous manque ici pour exposer le raisonnement mi-théorique mi-empirique qui permet de l'établir.

Nous avons examiné les résultats obtenus dans des cas particuliers par différents auteurs au moyen des trois méthodes mentionnées ci-dessus.

Seuls les résultats les plus sûrs ont été retenus. Ceci nous a conduit à éliminer un grand nombre d'essais sur modèles ainsi que certains cas traités par la méthode de relaxation ou par l'analogie électrique et pour lesquels les résultats numériques n'ont pas été publiés sous une forme suffisamment explicite.

Ces données, reportées sur le graphique de la fig. 4, justifient bien la forme générale de la relation (7). On remarquera en effet que les points correspondant aux résultats de BOULTON, que nous considérons comme les plus précis, se groupent presque parfaitement sur une droite.

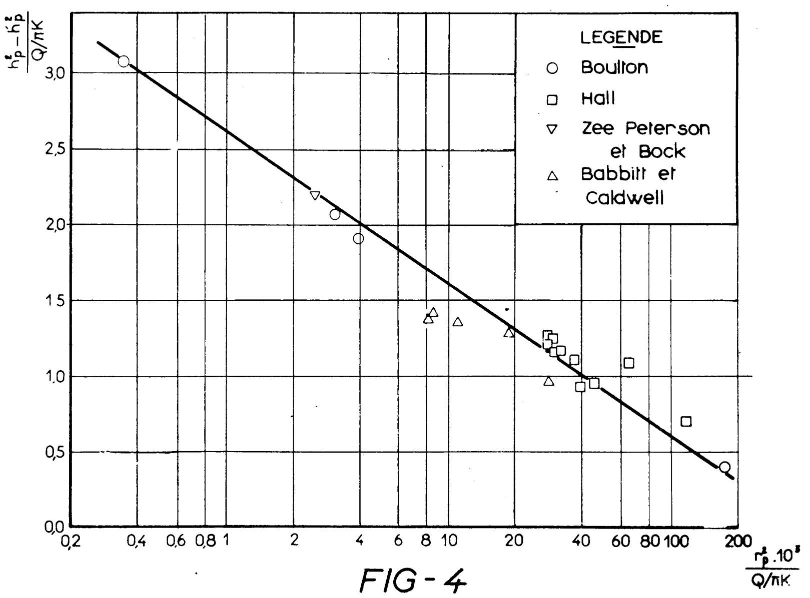

FIG - 4

Variation du niveau d'eau dans le puits et de la cote de la surface libre en fonction du débit

Lorsqu'on pompe à débit croissant, on constate que le niveau d'eau dans le puits, qui au début s'abaisse régulièrement au fur et à mesure que croît le débit, est sujet à une forte instabilité lorsque l'on approche du débit maximum dont le puits est susceptible.

A ce sujet, des notions assez confuses ont été introduites dans la théorie par JAEGER qui a cru voir une analogie entre les écoulements souterrains à surface libre et les écoulements en canaux découverts. Nous ne nous appesantirons pas sur ces conceptions et nous contenterons de montrer combien il est aisé d'expliquer par la seule formule de DUPUIT (dont nous savons maintenant qu'elle est rigoureuse) cette instabilité du niveau d'eau dans le puits.

La formule de DUPUIT pour le débit peut se mettre sous la forme :

$$h'^2_p = h'^2_a - \frac{ln\,(r_a/r_p)}{\pi K} \cdot Q$$

Le débit maximum du puits correspond évidemment à $h'_p = 0$ (h'_a restant constant). On a donc :

$$Q_{max} = \frac{\pi K \; h'^2_a}{ln\left(\frac{r_a}{r_p}\right)}$$

En introduisant cette expression dans l'équation précédente, nous obtenons la forme la plus simple de la relation débit du puits-niveau dans le puits.

$$h'^2_p = h'^2_a \left(1 - \frac{Q}{Q_{max}}\right) \tag{8}$$

Calculons la dérivée :

$$\frac{d(h'_p)}{dQ} = -\frac{h'^2_a}{2\,Q_{max}\,h'_p}$$

Pour $Q \rightarrow Q_{max}$, $h'_p \rightarrow 0$ et la dérivée précédente tend vers l'infini comme $1/h'_p$. Il en résulte donc qu'au voisinage du débit maximum le niveau du plan d'eau subira des variations considérables pour de très faibles variations du débit. Ceci traduit bien l'instabilité constatée.

Le rayon d'action d'un puits

Si tous les puits étaient forés au centre d'une tranchée circulaire assurant leur alimentation, ainsi que cela est le cas sur les modèles réduits, nous pourrions arrêter ici notre mémoire. Il suffirait en effet de prendre pour r_a la valeur du rayon de cette tranchée circulaire et d'appliquer à la détermination du débit et de la surface libre les formules que nous avons indiquées ci-dessus. Le problème serait entièrement défini.

Malheureusement, le cas idéal évoqué ci-dessus ne se présente jamais et l'on est à priori un peu perplexe lorsqu'il s'agit d'assigner une valeur numérique à r_a, le « rayon d'action ».

Prenons comme exemple le cas d'un puits situé au centre d'une nappe infiniment étendue ou pouvant être considérée comme telle par rapport aux dimensions de l'ouvrage. Un pompage dans ce puits va créer un cône de rabattement qui ne s'étendra certainement pas à l'infini. En effet, si tel était le cas, $\frac{r_a}{r_p}$ serait infini et le débit du puits, donné par la formule de DUPUIT, serait nul. D'un autre côté, il ne paraît pas absurde d'écrire que le rabattemene $\zeta = 0$ pour $r = \infty$. Il y a donc là une contradiction à laquelle la théorie des puits, envisagé dans la perspective d'un écoulement permanent, ne saurait échapper.

En vérité, cette contradiction provient précisément de l'hypothèse de la permanence de l'écoulement qui n'est pas compatible avec les données du problème. Reprenons l'exemple d'une nappe très étendue, mais supposons-la très grande et non pas infinie. Admettons en outre que sur ses bords cette nappe est limitée, non pas par de l'eau libre, mais par des surfaces imperméables. Nous avons donc une cuvette étanche remplie d'alluvions gorgées d'eau. Si nous pompons dans un puits situé en son centre, nous allons créer un cône de rabattement qui, théoriquement, ne se stabilisera jamais, puisque nous n'avons pas prévu d'alimentation de la nappe. En réalité, il s'étendra assez rapidement jusqu'à une certaine distance du puits, puis son accroissement sera de plus en plus lent et, à partir d'un certain moment, le cône sera pratiquement stationnaire. On a alors atteint, non pas un régime permanent en toute rigueur, mais un régime « quasi-permanent ».

L'exemple précédent montre que, pour comprendre la notion de rayon d'action, il faut étudier l'écoulement non-permanent vers un puits placé au centre d'une nappe très grande par rapport à ses dimensions. Dans un but de simplification, nous la supposerons d'ailleurs infinie.

Etude du mouvement non permanent d'une nappe lors d'un pompage à débit constant.

Nous avons établi par ailleurs * les équations générales qui régissent les écoulements de filtration non-permanents à surface libre. Elles ne se prêtent pas, dans le cas général, à une étude analytique. Cependant, dans le cas des nappes peu profondes (c'est-à-dire des nappes dont les dimensions horizontales sont grandes par rapport à leur épaisseur) et dont la surface libre ne présente que de faibles pentes, on peut réduire les équations générales à

* G. SCHNEEBELI, P. HUARD de la MARRE : Nouvelles méthodes de calcul pratique des écoulements de filtration non permanents à surface libre. *La Houille Blanche*, N° B/1953.

l'équation de la chaleur, que nous écrirons en coordonnées polaires :

$$\frac{e}{\mathrm{K\,H}} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \tag{9}$$

$\zeta = h'_a - h$ est le rabattement,
H l'épaisseur moyenne de la nappe,
K le coefficient de DARCY,
e la porosité effective du terrain. (Volume d'eau mobile contenue dans l'unité de volume apparent du sol).

Nous remarquerons ici que les hypothèses faites quant au caractère de l'écoulement sont celles de DUPUIT **. Il n'y a donc plus lieu, dans ce qui suit, de distinguer h et h'.

Nous appellerons :

$\mathrm{V} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ la vitesse de rabattement.

En dérivant par rapport à t l'équation (10) nous obtenons :

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial r} \right) \tag{10}$$

avec $\alpha = \frac{\mathrm{K\,H}}{e}$.

Une solution simple de cette équation est :

$$\mathrm{V} = \mathrm{C} \frac{e^{-r^2/4\alpha t}}{t} \tag{11}$$

A un instant t donné, V décroît exponentiellement lorsqu'on s'éloigne du puits. Ceci paraît raisonnable. Par ailleurs, lorsque $t \to \infty$ $\mathrm{V} \to 0$. L'écoulement tend bien vers un régime « quasi-permanent ».

Calculons le débit du puits. Le volume d'eau dont est diminuée la nappe dans l'unité de temps est évidemment :

$$\int_{r=0}^{r=\infty} 2\pi\, r\, e \frac{\partial \zeta}{\partial t} dr$$

Comme le liquide est supposé incompressible ce volume doit entrer dans le puits. Nous avons donc

$$\mathrm{Q} = \int_{r=0}^{r=\infty} 2\pi\, r\, e\, \mathrm{V}(r)\, dr = \frac{2\pi\, e\, \mathrm{C}}{t} \int_0^\infty e^{-r^2/4\alpha t}\, r\, dr$$

en posant $z = r^2/4\alpha t$

$$\mathrm{Q} = 4\pi\, e\, \mathrm{C}\, \alpha \int_{z=0}^{z=\infty} e^{-z} dz = 4\pi\, e\, \mathrm{C}\, \alpha$$

Le débit est donc indépendant de t. L'équation précédente nous donne la valeur de la constante C :

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{Q}}{4\pi e \alpha} = \frac{\mathrm{Q}}{4\pi \mathrm{K\,H}}$$

En introduisant cette valeur dans (11) nous pouvons écrire :

$$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{Q}}{4\pi\,\mathrm{K\,H}} \cdot \frac{e^{-r^2/4\alpha t}}{t} \tag{12}$$

La fonction V (r, t) ainsi définie correspond à la vitesse de rabattement d'une nappe dans laquelle on pompe un débit constant Q.

** Elles sont même un peu plus restrictives puisque nous supposons constante l'épaisseur moyenne H de la nappe.

Le rabattement $\zeta(r, t)$, obtenu au bout d'un temps t, à la distance r de l'axe du puits s'obtient facilement à partir de l'expression (12) :

$$\zeta(r, t) = \int_0^t V(r, t)\, dt = \frac{Q}{4\pi K H} \int_0^t \frac{e^{-r^2/4\alpha t}}{t}\, dt.$$

Pour calculer l'intégrale nous posons :

$$u = \frac{r^2}{4\alpha\, t} \text{ ce qui donne } t = \frac{\cancel{4\alpha}\, r^2}{4\alpha\, \cancel{r^2} u} \text{ et } dt = -\frac{\cancel{4\alpha}\, r^2}{4\alpha\, \cancel{r^2}\, u^2}\, du$$

l'intégrale s'écrit alors :

$$-\int_\infty^u \frac{e^{-u}}{u}\, du = \int_u^\infty \frac{e^{-u}}{u}\, du = -\mathrm{E}\, i\,(-u)$$

C'est une intégrale logarithmique dont les valeurs ont été tabulées *.

Les rabattements sont donc finalement donnés par la formule **

$$\frac{\zeta(r, t)}{Q/4\pi K H} = -\mathrm{E}i \left(\frac{-r^2}{4 \left(\frac{K H}{e} \right) t} \right) \tag{13}$$

Pour les faibles valeurs de u

$$-\mathrm{E}\, i\,(-u) \rightarrow ln \left(\frac{1}{u} \right)$$

avec

$$\gamma = \exp \left\{ \int_0^1 \frac{1 - e^x}{x}\, dx - \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx \right\} = e^{0,577} = 1,781.$$

De sorte que pour les grandes valeurs de $\dfrac{t}{r^2/4 \dfrac{K H}{e}}$ le rabattement est donné approximativement par :

$$\frac{\zeta(r, t)}{Q/4\pi KH} = ln \left(\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{t}{r^2/4 \dfrac{K H}{e}} \right) \tag{14}$$

Les valeurs numériques correspondant à l'équation (14) sont données par la courbe de la fig. 5. La droite en trait mixte correspond à l'approximation logarithmique de l'équation (14). On voit que celle-ci donne de bons résultats dès que

$$\frac{t}{r^2/4 \dfrac{K H}{e}} > 10$$

Nous pouvons mettre l'équation (14) sous la forme :

$$\zeta(r, t) = \frac{Q}{2\pi K H}\, ln \left(\frac{2 \sqrt{\dfrac{t K H}{\gamma e}}}{r} \right) \tag{15}$$

Cette expression décrira d'autant mieux la surface libre à l'instant t que r sera plus petit c'est-à-dire que l'on se rapprochera davantage du puits.

* Cf. JAHNKE et EMDE, *Tables of functions with formules and curves.* Dover New York 1945.

** Cette solution n'est autre que celle qu'a donnée THEIS pour les écoulements en milieu compressible. Nous avons cependant jugé utile de la développer d'une façon plus directe et, espérons-nous, plus compréhensible.

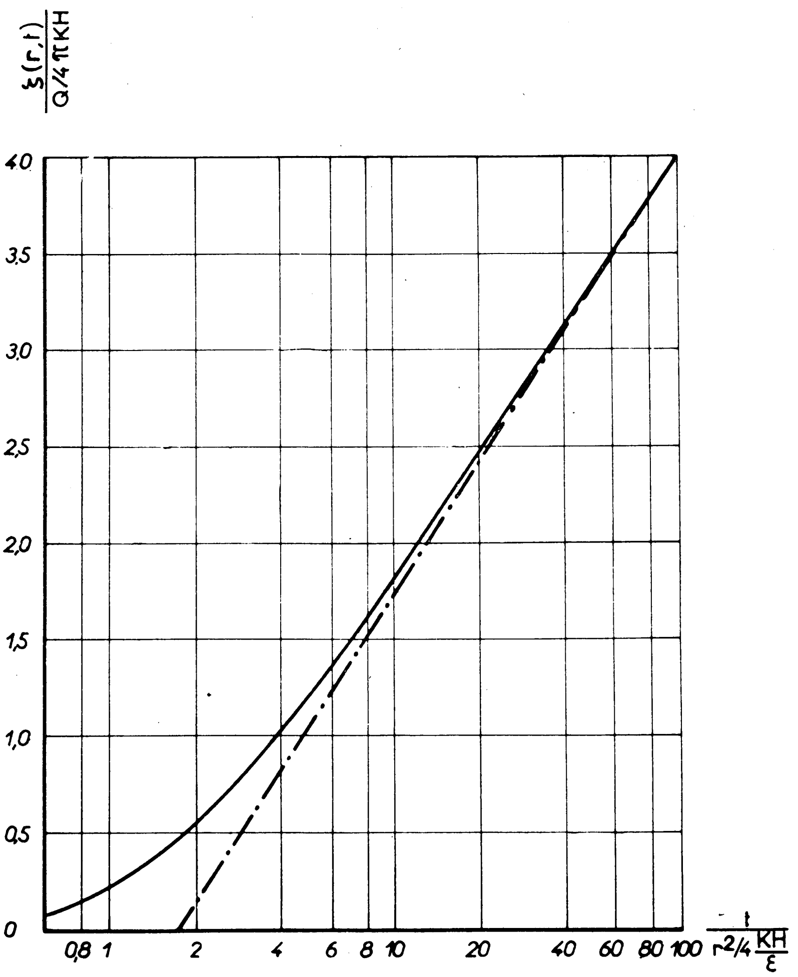

Fig. 5

Pour $r = 2\sqrt{\dfrac{t\,K\,H}{\gamma\,e}}$, le rabattement donné par la formule approchée est nul, alors qu'en réalité il est (cf. fig. 5)

$$\zeta \cong 0{,}5\ \frac{Q}{4\pi\,K\,H} = \frac{Q}{8\pi\,K\,H}$$

Si r_p est le rayon du puits, et $\zeta_p\,(t)$ le rabattement au droit du puits à l'instant t considéré *, nous pouvons écrire :

$$Q = 2\pi\,K\,H\,\frac{\zeta_p(t)}{ln\left(\dfrac{2\sqrt{\dfrac{t\,K\,H}{\gamma\,e}}}{r_p}\right)} \tag{16}$$

* Il faut remarquer que, le débit étant maintenu constant, le rabattement dans le puits doit augmenter avec le temps. Dans le cas contraire, où le rabattement dans le puits serait constant, le débit décroîtrait dans le temps. La solution analytique du problème d'écoulement variable serait alors différente de celle que nous examinons ici.

La notion de rayon d'action

Ces résultats sont à rapprocher de ceux que l'on obtient dans le cas d'un régime permanent. Avec les mêmes hypothèses que celles qui nous ont conduits à l'équation (9), on trouve dans ce cas :

$$Q = 2\pi \mathrm{K\,H} \frac{\zeta_p}{ln\left(\frac{r_a}{r_p}\right)} \tag{17}$$

où r_a est le fameux « rayon d'action « qu'on est obligé d'introduire dans la théorie de l'écoulement permanent vers un puits. Quant au cône de dépression permanent il a pour équation :

$$\zeta(r) = \frac{Q}{2\pi \mathrm{K\,H}} \, ln\left(\frac{r_a}{r}\right) \tag{18}$$

En comparant les formules (17) et (16) et les équations (18) et (15), on voit qu'un écoulement permanent fictif donne le même débit et présente approximativement le même cône de rabattement, que l'écoulement non-permanent à débit constant à condition de donner à chaque instant au rayon d'action la valeur

$$r_a = 2\sqrt{\frac{t\,\mathrm{K\,H}}{\gamma\; e}} \cong 1{,}5\sqrt{t\,\frac{\mathrm{K\,H}}{e}} \tag{19}$$

En d'autres termes, à partir d'un certain temps après le début du pompage, l'écoulement variable peut être considéré au voisinage du puits comme une succession d'écoulements permanents fictifs à rayon d'action croissant avec le temps suivant la formule (19).

La vitesse d'élargissement du « cône de rabattement »

$$\frac{dr_a}{dt} = \sqrt{\frac{\mathrm{K\,H}/e}{\gamma\, t}}$$

décroît dans le temps et, bien que ce dernier ne se stabilisera jamais rigoureusement, on tend à peu à peu vers un régime quasi-permanent.

La variation du rabattement dans le puits. Temps d'établissement du « régime quasi-permanent »

A un instant donné, la vitesse de rabattement maximum se rencontre au droit du puits. Elle est donnée par :

$$\mathrm{V}\,(r_p, t) = \frac{Q}{4\,\pi\,\mathrm{K\,H}} \cdot \frac{e^{-\frac{r^2 p}{4\alpha t}}}{t}$$

On pourra admettre qu'un « régime quasi-permanent » est atteint lorsque cette vitesse est inférieure à une valeur V_0 donnée. Si on se donne cette valeur, l'équation précédente permet de déterminer le temps T d'établissement du « régime quasi-permanent » tel que

$$\mathrm{V} < \mathrm{V}_0 \quad \text{si} \quad t > \mathrm{T}$$

Pratiquement, cependant, la valeur V_0 qu'on est amené à se fixer dépendra surtout de la durée du pompage. En effet, on admettra volontiers que le régime est permanent si, pendant le temps τ de pompage à débit constant, la variation du rabattement ζ_p au puits ne dépasse pas sensiblement une quantité ε_ζ très petite.

Le rabattement au droit du puits est donné par :

$$\zeta_p\,(t) = \frac{Q}{2\,\pi\,\mathrm{K\,H}}\, ln\, \frac{2\sqrt{\frac{t\,\mathrm{K\,H}}{\gamma\, e}}}{r_p}$$

Et le temps d'établissement du « régime quasi-permanent » est défini par :

$$\zeta_p\,(T+\tau) - \zeta_p\,(T) = \varepsilon\zeta = \frac{Q}{2\pi K H}\,ln\sqrt{\frac{T+\tau}{T}}$$

d'où

$$T = \frac{\tau}{e^z - 1} \qquad \text{avec } z = \frac{4\pi K H \varepsilon\zeta}{Q} \tag{20}$$

z sera en général petit (de l'ordre de $\varepsilon\zeta$). Dans ce cas, nous pouvons écrire :

$e^z - 1 \cong z$ et la formule (20) devient :

$$T \cong \frac{\tau}{z} = \frac{\tau Q}{4\pi K H \varepsilon\zeta} \tag{21}$$

L'erreur commise par rapport à la formule (20) ne dépassera pas 5 % si

$$\frac{4\pi K H \varepsilon\zeta}{Q} < 0{,}1.$$

Le rayon d'action au bout du temps T sera donné approximativement par la formule

$$r_a\,(T) \cong 1{,}5\sqrt{\frac{\tau Q}{4\pi e \varepsilon\zeta}} \tag{22}$$

Le quotient $\varepsilon\zeta/\tau$ figurant dans (21) et (22) peut être considéré comme un « indice de permanence ». Nous le noterons λ. Remarquons qu'il a la dimension d'une vitesse. En fait, c'est la vitesse de rabattement moyenne pendant le temps τ. Pratiquement, on pourra l'exprimer en m/heure. Une valeur $\lambda = \frac{1}{1000}$ m/h correspondra à un état de quasi-permanence tel qu'au bout de 10 heures de pompage continu le rabattement près du puits n'a augmenté que de 1 cm.

En introduisant ce paramètre dans les équations (21) et (22) nous obtenons les formules pratiques suivantes :

Temps d'établissement du régime quasi-permanent :

$$T \text{ en heures} \cong 2{,}2\,\frac{Q}{K H \lambda}\,.\,10^{-5} \tag{23}$$

Rayon d'action :

$$r_a \text{ en mètres} \cong 0{,}42\sqrt{\frac{Q}{\lambda e}} \tag{24}$$

Dans ces formules on exprime Q en m^3/heure
K H en m^2/sec
λ en m/heure
e est un nombre sans dimensions.

Le rayon d'action des puits se trouvant au voisinage d'une zone d'alimentation de la nappe. (Ecoulements véritablement permanents)

Dans ce qui précède, nous avons examiné le puits situé à grande distance de la zône d'alimentation de la nappe et nous avons vu que l'écoulement ne saurait être véritablement permanent. Ceci n'est plus le cas lorsque le puits envisagé est situé à proximité d'une masse d'eau alimentant effectivement la nappe * (rivière, canal, etc...).

On se trouve alors en présence d'écoulements vraiment permanents entre deux limites connues (la paroi du puits et la limite de la masse d'eau). Le problème de la détermination du rayon d'action est alors très simple.

* Il faudra dans tous les cas s'assurer si l'alimentation est effective. Il arrive souvent, en effet, qu'une masse d'eau soit pratiquement sans communication avec la nappe qu'elle recoupe.

En effet, ainsi que l'a montré M. BRILLANT en reprenant le raisonnement de TCHARNYI, la fonction $I = (\frac{h'^2}{2})$ définie comme

$$\frac{h'^2}{2} = \int_o^h \varphi \, dz - \frac{h^2}{2}$$

est harmonique par rapport aux coordonnées x, y du plan horizontal. Le débit traversant une surface verticale de base unité et de normale $\bar{n}$ est :

$$q_n = K \frac{\partial}{\partial n} (\frac{h'^2}{2})$$

On est donc ramené à des écoulements plans auxquels on peut appliquer les méthodes connues de transformation conforme, le principe des images, etc...

Parmi toutes les solutions de problèmes-plans, nous signalerons, à titre d'exemple, celle qui concerne le cas, assez fréquent, d'un puits au voisinage d'un cours d'eau rectiligne alimentant la nappe :

Si d est la distance du puits à ce cours d'eau, et h'_a la cote du plan d'eau libre, on trouve pour le débit la formule :

$$Q = \pi K \frac{h'^2_a - h'^2_p}{ln \frac{2\,d}{r_p}} \qquad (25)$$

Le puits a alors un « rayon d'action équivalent »

$$r_a = 2\ d.$$

Remarquons que si la distance d est importante, il sera indiqué de vérifier au moyen de la formule (19) si le temps nécessaire pour atteindre le rayon d'action $r_a = 2\,d$ n'est pas de beaucoup supérieur au temps de pompage envisagé, car si ceci était le cas, on obtiendrait de meilleurs résultats en déterminant le rayon d'action au moyen de la formule (24).

Influence d'une anisotropie du terrain

On sait que l'on peut transformer un écoulement en milieu homogène et anisotrope de perméabilité K_H et K_V en un écoulement fictif à travers un milieu isotrope de perméabilité K_V en réduisant ses dimensions horizontales dans le rapport $\sqrt{\frac{K_V}{K_H}}$

Si Q est le débit de l'écoulement réel en milieu anisotrope et Q' le débit de l'écoulement isotrope fictif, on a :

$$Q/Q' = \sqrt{\frac{K_H{}^2\,K_V}{K_V\,3}} = \frac{K_H}{K_V}$$

Le débit de l'écoulement fictif sera donné par la formule de DUPUIT :

$$Q' = \pi K_V \frac{h_o'^2 - h_a'^2}{ln\,(\frac{r_a}{r_p})}$$

et la relation précédente nous donne :

$$Q = \frac{K_H}{K_V} \qquad Q' = \pi\,K_H \frac{h_a'^2 - h_o'^2}{ln\,(\frac{r_a}{r_p})}$$

Le débit est donc donné par la formule de DUPUIT dans laquelle figure la *perméabilité horizontale*. Il est indépendant de la perméabilité verticale, de sorte que — ainsi que l'a très justement remarqué M. BRILLANT — une éventuelle hétérogénéité du terrain qui n'affecterait que la perméabilité verticale n'enlève rien à la validité de la formule de DUPUIT.

On peut montrer de même que la surface libre d'un écoulement en milieu anisotrope est représentée correctement par la formule de DUPUIT (dans laquelle intervient la perméabilité K_H) à partir de la distance r_D de l'axe du puits telle que

$$\left.\frac{dh'}{dr}\right|_{r_D} = \frac{\sqrt{K_V/K_H}}{10}$$

Cette distance est plus grande que dans le cas d'un terrain isotrope, car on a toujours $K_H > K_V$.

La cote de la surface libre sur la paroi du puits s'obtiendra encore à partir du graphique de la fig. 4, mais il faudra y remplacer

$$\frac{h_p{}^2 - h_p{}'^2}{Q/\pi K} \text{ par } \frac{h_p{}^2 - h_p{}'^2}{Q/\pi K_H} \quad \text{et} \quad \frac{r^2_p}{Q/\pi K} \text{ par } \frac{r^2_p}{Q/\pi K_V}$$

On voit facilement que la surface libre sera d'autant moins déprimée que K_V/K_H sera plus faible.

Conclusions

La formule de DUPUIT permet une prévision aussi bonne que possible du débit d'un puits puisqu'elle n'exige en fin de compte que les conditions suivantes :

1°) L'écoulement doit se faire suivant la loi de DARCY.

2°) Le terrain doit être homogène au point de vue de la perméabilité horizontale seulement.

La seule difficulté que peut soulever cette formule est celle du choix du rayon d'action. Dans certains cas, lorsque des masses d'eau sont au voisinage du puits, dont on sait avec certitude qu'elles alimentent la nappe, la détermination de ce rayon sera relativement aisée, mais bien plus souvent la nappe ne sera alimentée qu'à de très grandes distances du puits, On ne pourra alors parler en toute rigueur d'un régime permanent d'écoulement et il faudra tenir compte de la variable temps.

Partant d'une solution approchée de l'écoulement variable à débit constant, nous sommes arrivés à la conception d'un « régime quasi-permanent » qui est, strictement parlant, un régime variable mais que l'on peut concevoir comme la succession dans le temps d'états permanents. Nous avons proposé deux formules pratiques (23) et (24) dont l'une permet de déterminer le temps T nécessaire à l'établissement du régime « quasi-permanent » et l'autre le rayon d'action correspondant. Malheureusement, dans cette dernière formule, la porosité effective *e* du terrain, qui est extrêmement variable (0,1 à 15 %) et souvent très mal connue, intervient d'une façon très sensible. Il restera donc difficile d'évaluer a priori, le rayon d'action. Par contre, la formule (24) montre que le rayon d'action croît — toutes choses étant égales par ailleurs — comme la racine carrée du débit du puits. Ce résultat, qui est très intéressant en lui-même, permet par ailleurs de prévoir le rayon d'action d'un puits de grand diamètre ou d'une fouille à partir de relevés piézométriques effectués lors du pompage dans un forage d'essai.

Enfin, en ce qui concerne la surface libre de la nappe rabattue, nous avons donné des éléments permettant son tracé approximatif aussi bien dans le cas d'un terrain anisotrope que d'un terrain isotrope. Il convient de remarquer ici que si, dans une certaine mesure, le débit n'est que faiblement affecté par une hétéogénéité locale, il n'en est pas ainsi de la forme de la surface libre. Ainsi, par exemple, si le terrain au voisinage du puits est plus perméable que les alluvions environnantes, le débit n'est modifié que faiblement si la zône perméable ne s'étend pas trop loin. En effet, tout se passe alors comme si le puits avait un diamètre fictif plus grand que son diamètre réel. Or, le débit varie seulement comme le logarithme du diamètre du puits. Par contre, la surface libre subira une chute très sensible à la limite de la zône plus perméable et sera beaucoup plus basse au voisinage du puits que la surface libre théorique.

BIBLIOGRAPHIE

J. DUPUIT — *Etudes théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans les canaux découverts et à travers les terrains perméables.* Dunod, Paris (2e éd.) 1863).

R. EHRENBERGER — Versuche über die Ergiebigkeit von Brunnen und die Bestimmung der Durchlässigkeit des Sandes. *Zeitschrift des Osterreichischen Ing. und Architekten* — Vereins, 1928.

M. PORCHET — Hydrodynamique des puits. *Annales du Génie Rural,* Fasc. 60 — 1931.

J. KOZENY — Theorie und Berechnung der Brunnen. *Wasserkraft und Wasserwirtschaft*-8, 9, 10, 13 avril et 3 et 16 mai 1933.

M. MUSKAT — *Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media.* McGraw-Hill, 1937 — Edwards, 1945.

A. VIBERT — Le mouvement de l'eau dans le sol. *Le Génie Civil,* 2 juillet, 12 et 19 nov. 1938, 11 mars 1939, 1er et 15 juin 1943, 1er mai 1949, 1er sept. 1950.

Ch. JAEGER — *Hydraulique technique.* Ed. française Dunod, 1954.

H. E. BABBITT et D. H. CALDWELL — The Free surface around, and interference between, gravity wells. *University of Illinois Bulletin,* Vol. 45, No 30, 7 janvier 1948.

H. CAMBEFORT — *Les puits filtrants et la formule de DUPUIT.* Travaux, juin 1948.

N. S. BOULTON — The Flow Pattern near a gravity well in a uniform water — bearing Medium. *Journal of the institution of Civil Eng.,* décembre 1951.

H. CAMBEFORT — Contribution à l'étude du rabattement des nappes aquifères. *Travaux,* septembre et octobre 1952.

A. VIBERT — Sur une démonstration des formules de DUPUIT. *Le Génie Civil,* 1er janvier 1954.

H. P. HALL — A investigation of steady flow toward a gravity well. *La Houille Blanche,* No 1 — 1955.

CHONG-HUNG ZEE, D. F. PETERSON & R. O. BOCK — Flow into a well by electrical and membrane analogy. *Proc. A. S. C. E.,* Vol. 81, sept. 817, oct. 1955.

P. YEHUDA — Model tests of ground water flow into a tubular well. *Civil Engineering,* nov. dec. 1955.

J. BRILLANT — Le débit des écoulements en terrain perméable limité par un substratum horizontal étanche. *Le Génie Civil,* 1er mars 1956.